Prüfungsaufgaben

Körperberechnungen

Aufgabenblatt 1
6 Prüfungsaufgaben
Klassenstufe 10

Alle Lösungen auf CD

Datei Nr. 11621

Ausdruck nur von der CD aus möglich

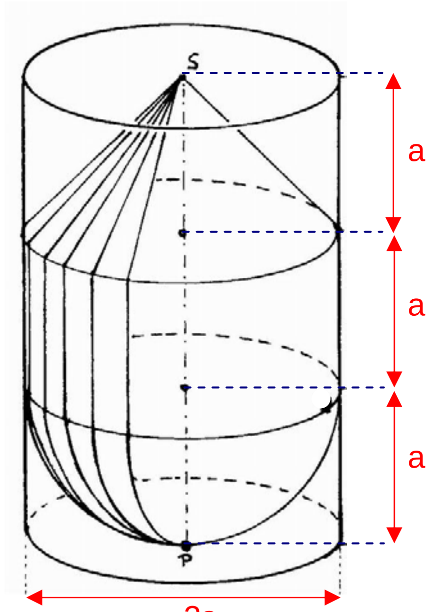
Friedrich Buckel

Juni 2002

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

Aufgabe 1

Der Körper K aus Figur 1 besteht aus einer Halbkugel, einem Kreiszylinder und einem Kreiskegel. Er entsteht durch Abschleifen aus einem Holzzylinder mit dem Durchmesser 2a und der Höhe 3a.



Figur 1

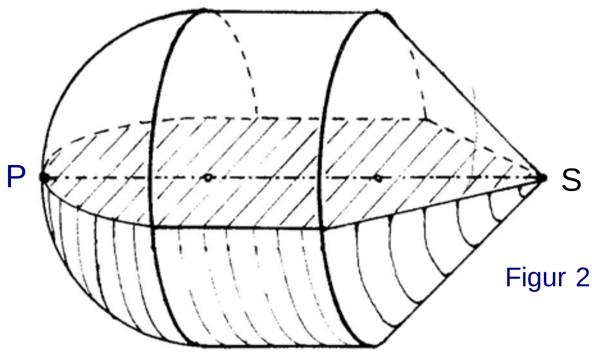
a) Wieviel Prozent Abfall entsteht beim Abschleifen ? Für wieviel cm^2 braucht man Farbe, wenn man den Körper anmalen will ?

Führe die Rechnung mit beliebigem a durch. Verwende dann a = 5 cm.

Ein solcher Körper K aus Glas (die in der Figur 1 angegeben Maße sind Innenmaße) liegt waagerecht und ist so mit einer Flüssigkeit gefüllt, daß diese gerade bis zur Achse reicht, wie Figur 2 zeigt.

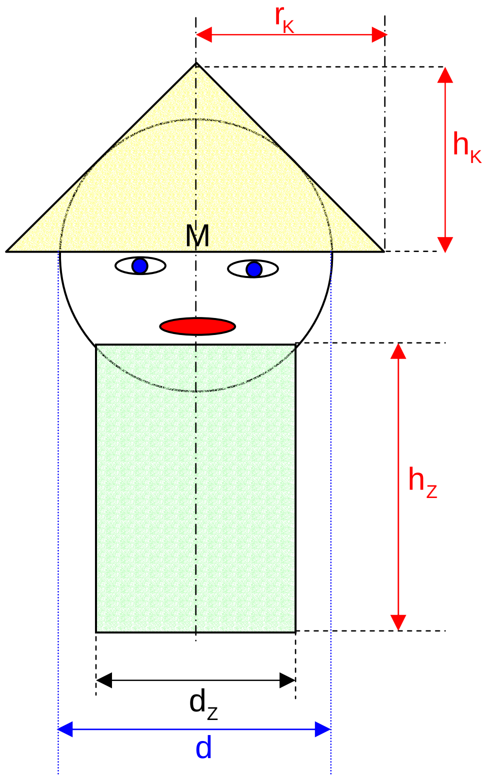
b) Dieser Körper wird nun so aufgestellt, daß P wie in Figur 1 ganz unten liegt. Wie hoch steht (von P aus gemessen) die Flüssigkeit jetzt ?

c) Nun wird dieser Glaskörper auf die Spitze S gestellt, so daß P ganz oben ist. Die Achse sei vertikal. Berechnen nun den Flüssigkeitsstand über S.



Figur 2

Aufgabe 2



Eine Fingerpuppe besteht aus einem offenen Kreiszylinder aus Karton, einem Kopf aus einer Styroporkugel und einem Hut aus einem unten offenen senkrechten Kreiszylinder. In diesem verschindet der Kopf genau zur Hälfte.

Der Öffnungswinkel des Kreiskegels ist 90^O .
Die Styroporkugel hat den Durchmessen $d = 6\text{ cm}$.

a) Zeige durch Rechnung, daß das Kegelhütchen den Radius

$r_K = 3\sqrt{2}\text{ cm}$ hat.

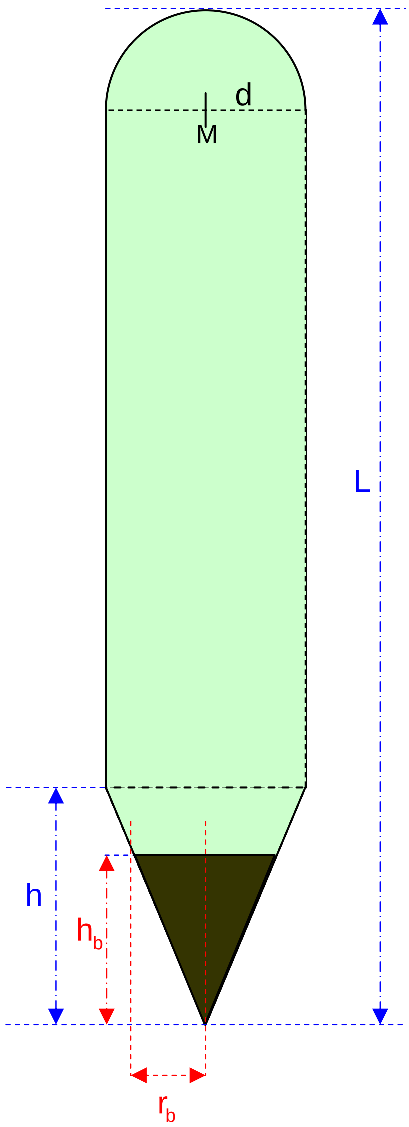
Gib die Höhe h_K des Hütchens an.

b) Der Zylinder für den Hals der Puppe hat den Durchmesser $d_Z = 3\text{ cm}$ und die Höhe $h_Z = 5\text{ cm}$.

Berechne die Höhe des gesamten Püppchens (einschließlich Hut) .

c) Vor dem Zusammenkleben der drei Bauteile sollen der ganze Kopf, das Hütchen und der Hals jeweils einfarbig und nur von außen mit verschiedenen Farben bemalt werden.
Peter hat dafür 3 Farbreste:
Das Blau reicht für 90 cm^2 , das Rot für 90 cm^2 und Gelb für 120 cm^2 .
In welchen Farbkombinationen kann er das Püppchen bemalen ?

Aufgabe 3



Ein Holzstab hat die Form eines senkrechten Kreiszylinders mit dem Durchmesser d = 10 cm. Und der Länge L = 1 m. Durch Abschleifen wird aus dem Holzstab ein Pfahl mit einer kegelförmigen Spitze mit der Länge h = 8 cm und einem halbkugelförmigen Kopf (siehe Skizze).

a) Berechne das Volumen des Pfahls (nachdem er abgeschliffen ist).

b) Der Pfahl wird so weit in die Erde gerammt, daß sich ein Viertel seines Volumens unter der Erde befindet.

Wie hoch ragt er dann noch aus der Erde heraus ?

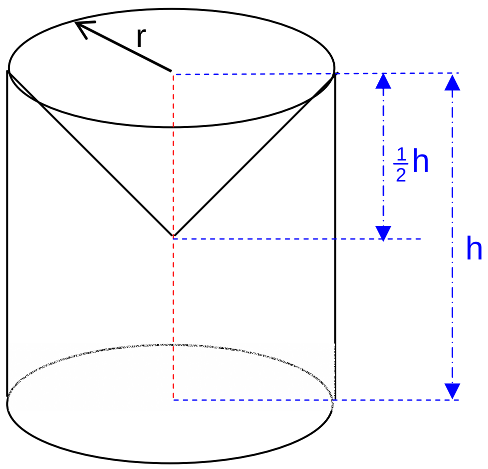
c) Um die Spitze des Pfahls zu schützen, wurde ihr ein kegelförmiges Blechstück aufgesetzt. Dadurch sind 75% des Volumens der Spitze ummantelt.

Wie groß sind Höhe h_b und Radius r_b des Blechkegels ?

Aufgabe 4

Ein Kreiszylinder aus Holz hat den Grundkreisradius r und die Höhe h.

Aus diesem Stück Holz wird ein Kreiskegel mit demselben Grundkreisradius r und der Höhe $\frac{1}{2}h$ herausgebohrt. Siehe Skizze.



a) Berechne für r = 20 cm und h = 80 cm das Volumen des verbleibenden Restkörpers..

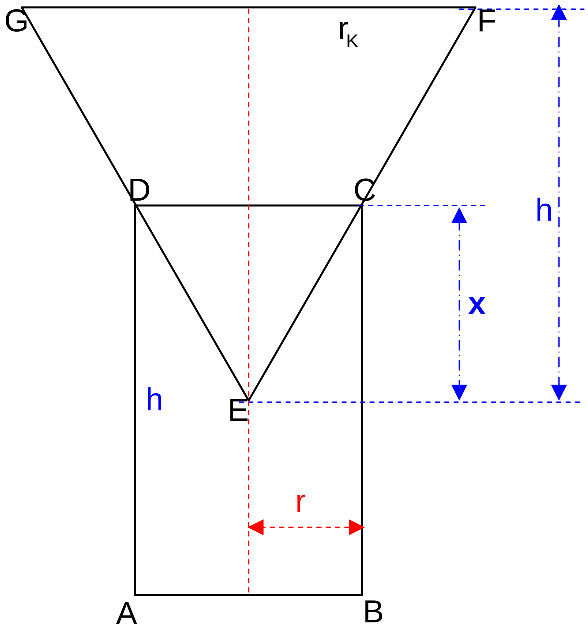
Dieser Restkörper soll als Gefäß verwendet und deshalb **innen** lackiert werden Wie groß ist die zu lackierende Fläche ?

b) Auch bei einem anderen Gefäß der oben beschriebenen Art ist der Zylinderradius r gleich dem Kegelradius. Die Höhe h des Zylinders ist wieder doppelt so groß wie die Höhe des Kegels. Dieses Gefäß wird **innen und außen** lackiert. Dabei fällt auf, daß man für den Außenanstrich – einschließlich des Gefäßbodens - viermal so viel Lack braucht wie für den Innenanstrich.

Bestimme daraus h als Vielfaches von r.

Aufgabe 5

Das Rechteck ABCD in der Skizze ist der Querschnitt eines offenen senkrechten Kreiszylinders.



Das Dreieck EFG ist der Querschnitt eines oben offenen senkrechten Kegels.

Beide Körper haben die gleiche Höhe $h = 8$ cm und die gleiche Mantelfläche M.

Der Grundkreisradius des Kegels ist $r_K = 6$ cm.

a) Berechne den Grundkreisradius r des Zylinders.

b) Der Zylinder habe den Grundkreisradius $r = 3{,}75$ cm. Er ist randvoll mit Wasser gefüllt. Der Kegel wird in der in der Skizze gezeigten Weise möglichst tief so in den Zylinder hineingedrückt, daß die Achsen von Kegel und Zylinder auf derselben Geraden liegen.

Berechne die Eintauchtiefe x des Kegels.

Welches Volumen hat das Wasser, das dabei aus dem Zylinder herausgedrückt wird ?

c) Das in Teilaufgabe d) im Zylinder verbliebe Wasser wird in den (senkrecht gehaltenen) Kegel geschüttet.

Bis zu welcher Höhe ist der Kegel gefüllt ?

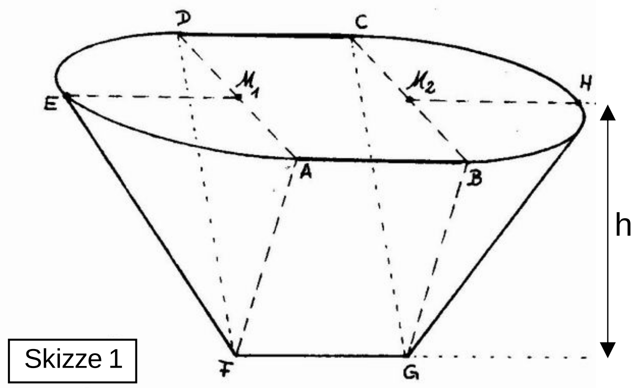
Aufgabe 6

Ein Kaffeefilter hat die in Skizze 1 gezeigte Form:
Ein dreiseitiges Prisma mit zwei angesetzten halben senkrechten Kreiskegeln.

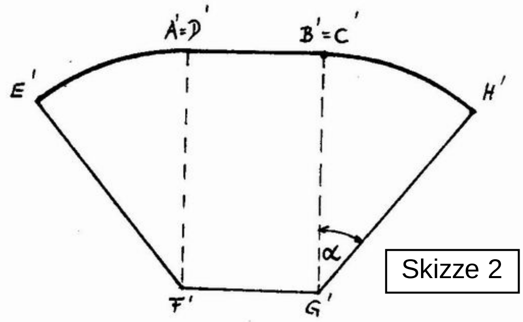
Die Höhe des Filters ist $h = 9$ cm.

Im Rechteck ABCD haben AB die Länge 6 cm und BC die Länge 12 cm.

AB ist senkrecht zu den gleichschenkligen Dreiecken DFA und CGB,



Skizze 1



Skizze 2

a) Berechne das Fassungsvermögen des Filters.

b) Bei der Herstellung des Filters wurde Papier mit der Aufschrift „50 g pro m^2" verwendet. Berechne die Masse des Filters.

c) Das Filter wird flach zusammengedrückt (siehe Skizze 2). Berechne den Mittelpunktswinkel α des Kreisausschnittes B'G'H'.

Lösung 1

a) Der Holzzylinder hat das Volumen $V_H = \pi a^2 \cdot 3a = 3\pi a^3$
(mit a = 5 cm wird dies $V = 375 \cdot \pi\ cm^3 = 1178\ cm^3$).

Der Körper besteht aus drei Teilen:

Kegel (oben): $V_1 = \frac{1}{3}\pi a^2 \cdot a = \frac{1}{3}\pi a^3$
Zylinder (Mitte): $V_2 = \pi a^2 \cdot a = \pi a^3$
Halbkugel (unten): $V_3 = \frac{2}{3}\pi a^3$
Körpervolumen: $V = \frac{1}{3}\pi a^3 + \pi a^3 + \frac{2}{3}\pi a^3 = 2\pi a^3$.

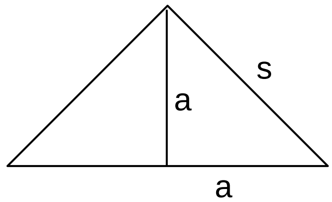
(Mit a = 5 cm wird dies $V = 250 \cdot \pi\ cm^3 = 785\ cm^3$)

Abfall: $\Delta V = V_H - V = 3\pi a^3 - 2\pi a^3 = \pi a^3$.

Umrechnung in Prozent mit einer Verhältnisgleichung:

$$\frac{p}{100\%} = \frac{\Delta V}{V_H} \Rightarrow p = \frac{\pi a^3}{3\pi a^3} \cdot 100\% = \frac{100}{3}\% = 33{,}3\%$$

<u>Oberfläche</u> des Körpers:



Kegel (oben): $M_1 = \pi r s = \pi a \cdot a\sqrt{2} = \pi\sqrt{2} \cdot a^2$
denn nach Pythagoras ist $s^2 = 2a^2 \Rightarrow s = a\sqrt{2}$

Zylinder (Mitte): $M_2 = U \cdot h = 2\pi a \cdot a = 2\pi a^2$
Halbkugel (unten): $O = 2\pi a^2$
Körpervolumen: $O = \pi\sqrt{2}a^2 + 2\pi a^2 + 2\pi a^2 = \left(4 + \sqrt{2}\right)\pi a^2 \approx 17a^2$

Für a = 5 cm folgt $O = 425\ cm^2$.

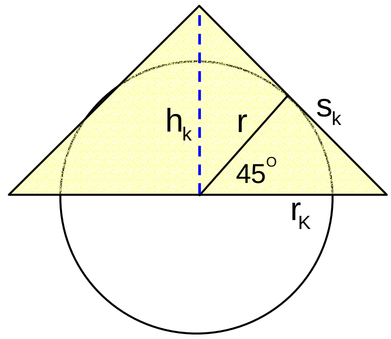
b) Das Flüssigkeitsvolumen im liegenden Körper ist $V_{Fl} = \frac{1}{2}V = \pi a^3$

Ist P unten, dann ist die Halbkugel mit $V_3 = \frac{2}{3}\pi a^3$ gefüllt, also steht im Zylinder das Restvolumen $\frac{1}{3}\pi a^3$. Da diese Flüssigkeitsmenge selbst ein Zylindervolumen ist, gilt: $\pi a^2 h_1 = \frac{1}{3}\pi a^3 \Rightarrow h_1 = \frac{1}{3}a$ $\left(\frac{5}{3}\ cm\right)$

c) Ist S unten, dann ist der Kegel mit $V_1 = \frac{1}{3}\pi a^3$ gefüllt, so daß im Zylinder das Restvolumen $\frac{2}{3}\pi a^3$ ist. Aus $\pi a^2 h_2 = \frac{2}{3}\pi a^3 \Rightarrow h_2 = \frac{2}{3}a$.
Insgesamt ergibt dies über S die Höhe $h_3 = a + \frac{2}{3}a = \frac{5}{3}a$ $\left(= \frac{25}{3}\ cm\right)$.

Lösung 2

a) Weil der Kegel die Kugel berührt, können wir den bekannten Radius der Kugel verwenden: Aus $d = 6\text{ cm} \Rightarrow r = 3\text{ cm}$.



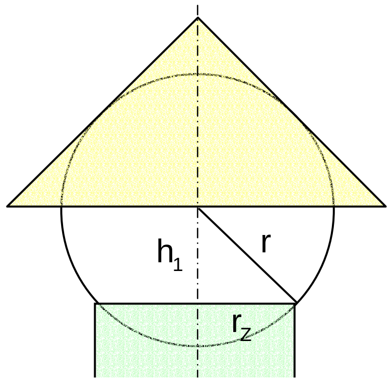
Weil das Dreieck, das den Querschnitt des Kegels darstellt, gleichschenklig und rechtwinklig ist, erhält man zwischen r und r_K auch den Winkel 45^O. Daher folgt:

$$\cos 45^O = \frac{r}{r_k} \Rightarrow r_K = \frac{r}{\cos 45^O} = \frac{r}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{2r}{\sqrt{2}} = r\sqrt{2} = 3\sqrt{2}\text{ cm}$$

Hierbei wurde verwendet, daß $\dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ ist.

Weil das Dreieck gleichschenklig rechtwinklig ist, folgt auch: $h_k = r_k = 3\sqrt{2}\text{ cm}$.

b) Die Höhe des Püppchens errechnet sich aus $h = h_K + h_1 + h_Z$, wobei $h_k = r_k = 3\sqrt{2}\text{ cm}$ und $h_Z = 5\text{ cm}$ bekannt sind. Es fehlt also die Höhe h_1 zwischen Zylinder und Kegel.
Nach Pythagoras folgt:



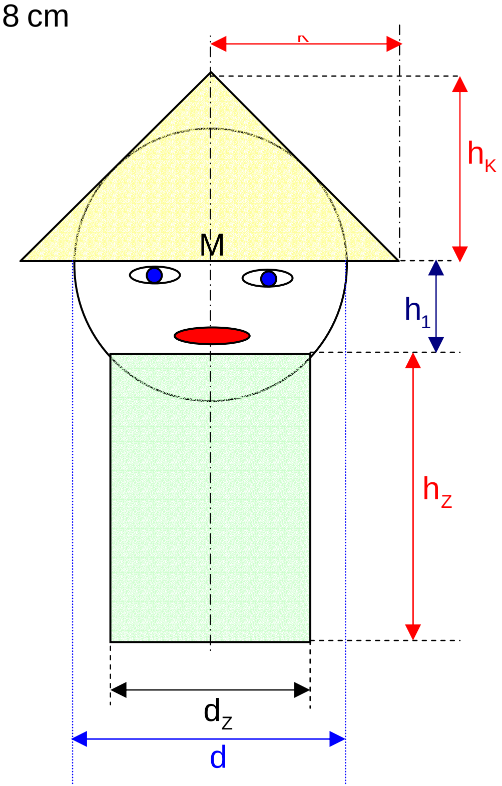
$$r^2 = h_1^2 + r_Z^2 \Rightarrow h_1 = \sqrt{r^2 - r_Z^2} = \sqrt{9 - \tfrac{9}{4}}\text{ cm}$$

$$h_1 = \sqrt{\tfrac{27}{4}}\text{ cm} = \tfrac{3}{2}\sqrt{3}\text{ cm} \approx 2{,}6\text{ cm}.$$

Gesamthöhe der Puppe:

$$h = h_K + h_1 + h_Z = 3\sqrt{2}\text{ cm} + \tfrac{3}{2}\sqrt{3}\text{ cm} + 5\text{ cm} \approx 11{,}8\text{ cm}$$

c) <u>**Oberflächenlackierung**</u>:



Kegelmantel: $M_{Kegel} = \pi r_k s_k$

$$\cos 45^O = \frac{r_k}{s_k} \Rightarrow s_K = \frac{r_K}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \sqrt{2}\cdot r_K$$

Also $M_{Kegel} = \pi r_k^2 \cdot \sqrt{2} = 18\pi\sqrt{2}\text{ cm}^2 \approx 80\text{ cm}^2$

Kugeloberfläche:
$O_{Kugel} = 4\pi r^2 = 36\pi\text{ cm}^2 \approx 113{,}1\text{ cm}^2$

Zylindermantel:
$M_{Zyl} = 2\pi r_Z \cdot h_Z = 15\pi\text{ cm}^2 \approx 47\text{ cm}^2$

Die Kugel muß also gelb werden, Kegel und Zylinder müssen rot bzw. blau sein oder umgekehrt.